

Maintenance imparfaite et modèles d'âge virtuel : tests d'adéquation

Léa Brenière Raymond Brummelhuis¹ Laurent Doyen²

¹Université Reims Champagne-Ardenne

²Laboratoire Jean Kuntzmann

13 septembre 2017



LABORATOIRE
JEAN KUNTZMANN
MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES - INFORMATIQUE



- 1 Introduction à la maintenance imparfaite
- 2 Modèles d'âge virtuel
- 3 Problématique
- 4 Qualité d'estimation
- 5 Tests d'adéquation
- 6 Conclusion
- 7 Bibliographie et bonus

Instants de défaillance et maintenance d'un système réparable

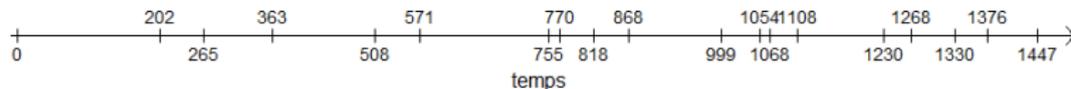


Table – Premiers instants de panne d'une voiture AMC Ambassador [1]

Obs.	Temps	Type
1	202	-1
2	265	-1
3	363	-1
4	508	-1
5	571	-1
6	755	-1
7	770	-1
8	818	-1
9	868	-1
...

Maintenance imparfaite et modèles d'âge virtuel : tests d'adéquation

Introduction à la maintenance imparfaite

Enjeux

Notations

Intensité conditionnelle de défaillance

Modèles d'âge virtuel

Problématique

Qualité d'estimation

Tests d'adéquation

Conclusion

Bibliographie et bonus

Plusieurs systèmes indépendants observés en parallèle et deux types de maintenance : préventives (o) et correctives (x)

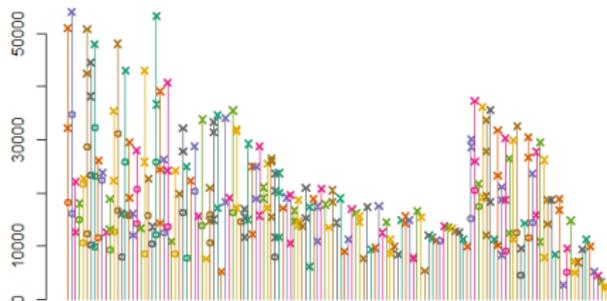


Table – Premiers instants de maintenance de moteurs diesel d'engins miniers brésiliens [2]

Obs.	Système	Temps	Type
1	1	18315	1
2	1	32133	-1
3	1	50934	-1
4	2	16137	1
5	2	34722	1
6	2	53990	-1
7	3	12666	-1
...

Maintenance imparfaite et modèles d'âge virtuel : tests d'adéquation

Introduction à la maintenance imparfaite

Enjeux

Notations

Intensité conditionnelle de défaillance

Modèles d'âge virtuel

Problématique

Qualité d'estimation

Tests d'adéquation

Conclusion

Bibliographie et bonus

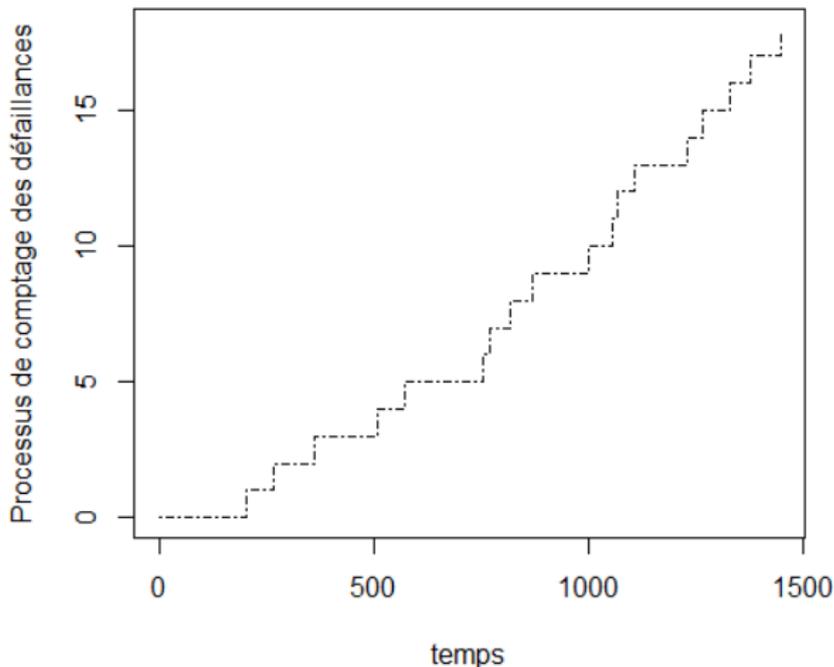
Effet de la réparation ?

Nous allons alors parler de
Maintenance imparfaite

Exemple : modèles d'âge virtuel
Effet = paramètre d'efficacité

T_1, \dots, T_n : instants de défaillance
(= maintenances correctives)

$\{N_t\}_{t \geq 0}$: processus de comptage des défaillances



Maintenance
imparfaite et
modèles d'âge
virtuel : tests
d'adéquation

Introduction à la
maintenance
imparfaite

Enjeux

Notations

Intensité
conditionnelle de
défaillance

Modèles d'âge
virtuel

Problématique

Qualité
d'estimation

Tests
d'adéquation

Conclusion

Bibliographie et
bonus

Définition (Intensité conditionnelle)

$$\forall t \geq 0, \quad \lambda_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{P}(N_{t+\Delta t} - N_{t-} = 1 | \mathcal{H}_{t-}),$$

où \mathcal{H}_{t-} : passé du processus

Caractérise la distribution du processus de défaillance

Définition (Intensité cumulée)

$$\forall t \geq 0, \quad \Lambda_t = \int_0^t \lambda_s ds$$

Introduction à la
maintenance
imparfaite

Enjeux
Notations
Intensité
conditionnelle de
défaillance

Modèles d'âge
virtuel

Problématique

Qualité
d'estimation

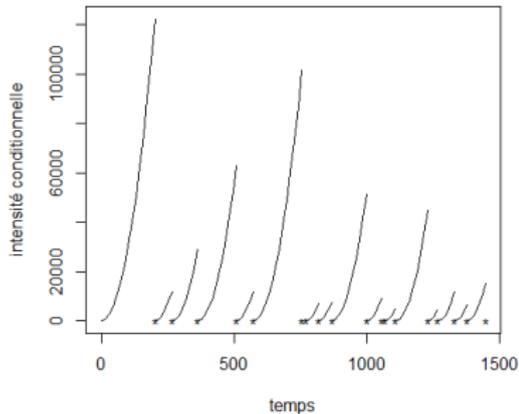
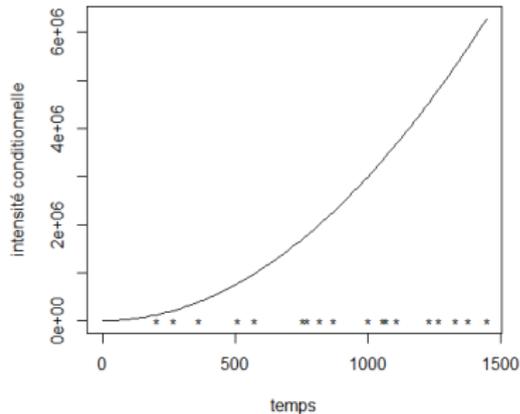
Tests
d'adéquation

Conclusion

Bibliographie et
bonus

ABAO = As Bad As Old
remise en route en l'état

AGAN = As Good As New
remplacement



```
m1 <- model.vam(Time&Type~(ABAO()|Weibull(1,3)),AMC_Amb)
plot(m1,'i',xlab="temps",ylab="intensité conditionnelle")
m2 <- model.vam(Time&Type~(AGAN()|Weibull(1,3)),AMC_Amb)
plot(m2,'i',xlab="temps",ylab="intensité conditionnelle")
```

Maintenance
imparfaite et
modèles d'âge
virtuel : tests
d'adéquation

Introduction à la
maintenance
imparfaite

Enjeux
Notations
Intensité
conditionnelle de
défaillance

Modèles d'âge
virtuel

Problématique

Qualité
d'estimation

Tests
d'adéquation

Conclusion

Bibliographie et
bonus

Âge virtuel

L'effet de la maintenance est de rajeunir le système :

$$\mathbb{P}(T_{i+1} \leq t \mid \mathcal{H}_{t-}) = \mathbb{P}(T \leq \varepsilon_i(t) \mid T > \varepsilon_i(T_i), \mathcal{H}_{T_i-}),$$

T instant de défaillance du nouveau système

$\varepsilon_i(t)$: âge virtuel du système entre la $i^{\text{ème}}$ et la $(i + 1)^{\text{ème}}$ maintenance.

On en déduit l'intensité conditionnelle :

$$\lambda_t = \varepsilon'_{N_{t-}}(t) \lambda(\varepsilon_{N_{t-}}(t)),$$

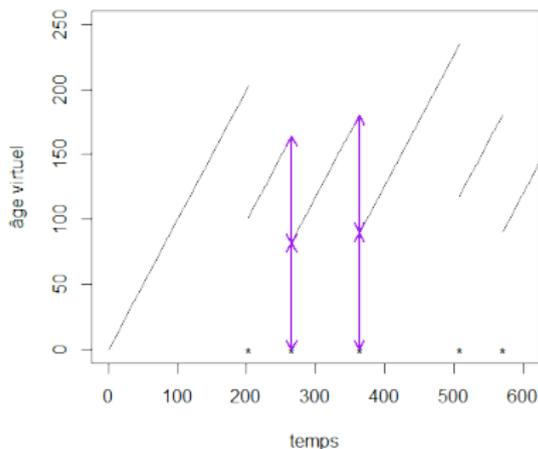
où $\lambda(\cdot)$ intensité initiale, dépendant de paramètres α et β
par ex. : $\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$ (Weibull)

Définition (ARA_∞)

$$\varepsilon_i(t) = \varepsilon_{i-1}(t) - \rho\varepsilon_{i-1}(T_i)$$

$$\lambda_t = \lambda \left(t - \rho \sum_{j=0}^{N_t-1} (1 - \rho)^j T_{N_t-j} \right)$$

```
modelARainf<-model.vam(Time & Type ~ (ARainf(0.5) | Weibull  
(1,3)),data=AMC_Amb)  
plot(modelARainf,'v',xlab="temps",ylab="âge virtuel")
```



Maintenance
imparfaite et
modèles d'âge
virtuel : tests
d'adéquation

Introduction à la
maintenance
imparfaite

Modèles d'âge
virtuel

Âge virtuel
Quelques modèles

Problématique

Qualité
d'estimation

Tests
d'adéquation

Conclusion

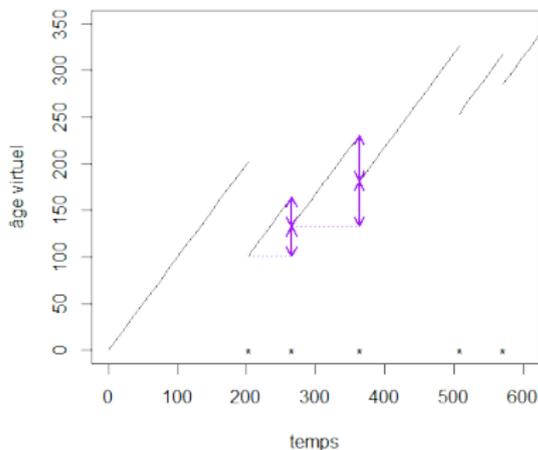
Bibliographie et
bonus

Définition (ARA₁)

$$\varepsilon_i(t) = \varepsilon_{i-1}(t) - \rho(\varepsilon_{i-1}(T_i) - \varepsilon_{i-1}(T_{i-1}))$$

$$\lambda_t = \lambda(t - \rho T_{N_{t-}})$$

```
modelARA1<-model.vam(Time & Type ~ (ARA1(0.5) | Weibull(1,3)
),data=AMC_Amb)
plot(modelARA1,'v',xlab="temps",ylab="âge virtuel")
```



Maintenance
imparfaite et
modèles d'âge
virtuel : tests
d'adéquation

Introduction à la
maintenance
imparfaite

Modèles d'âge
virtuel

Âge virtuel
Quelques modèles

Problématique

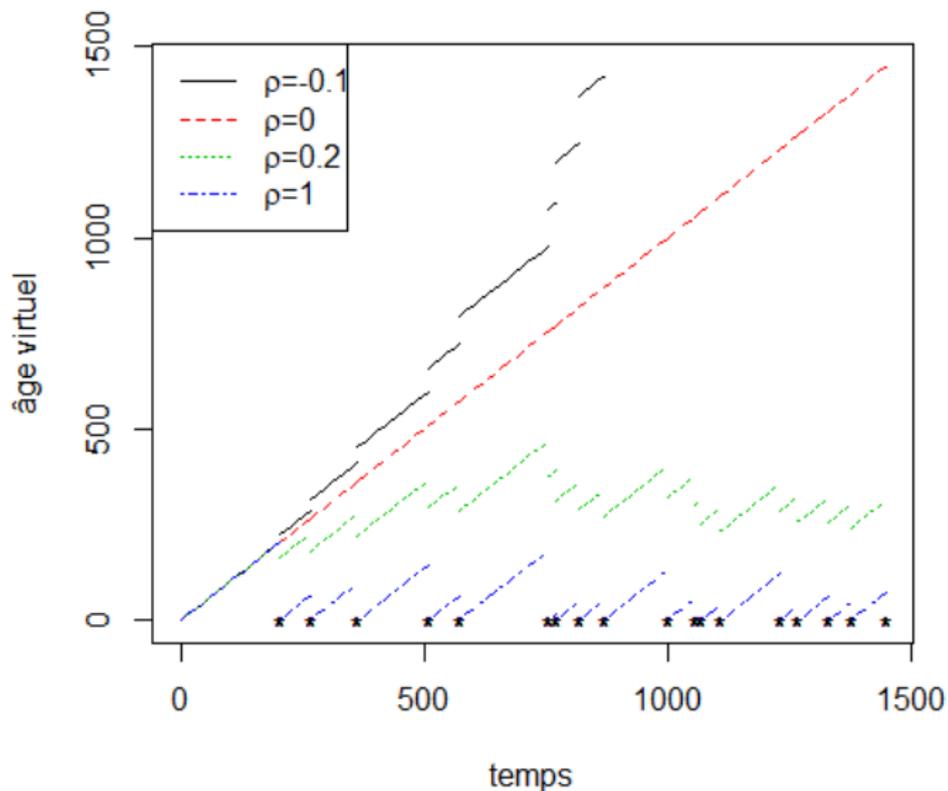
Qualité
d'estimation

Tests
d'adéquation

Conclusion

Bibliographie et
bonus

Efficacité :



D'autres modèles : ARA_m , QR, GQR...

Maintenance imparfaite et modèles d'âge virtuel : tests d'adéquation

Introduction à la maintenance imparfaite

Modèles d'âge virtuel

Âge virtuel
Quelques modèles

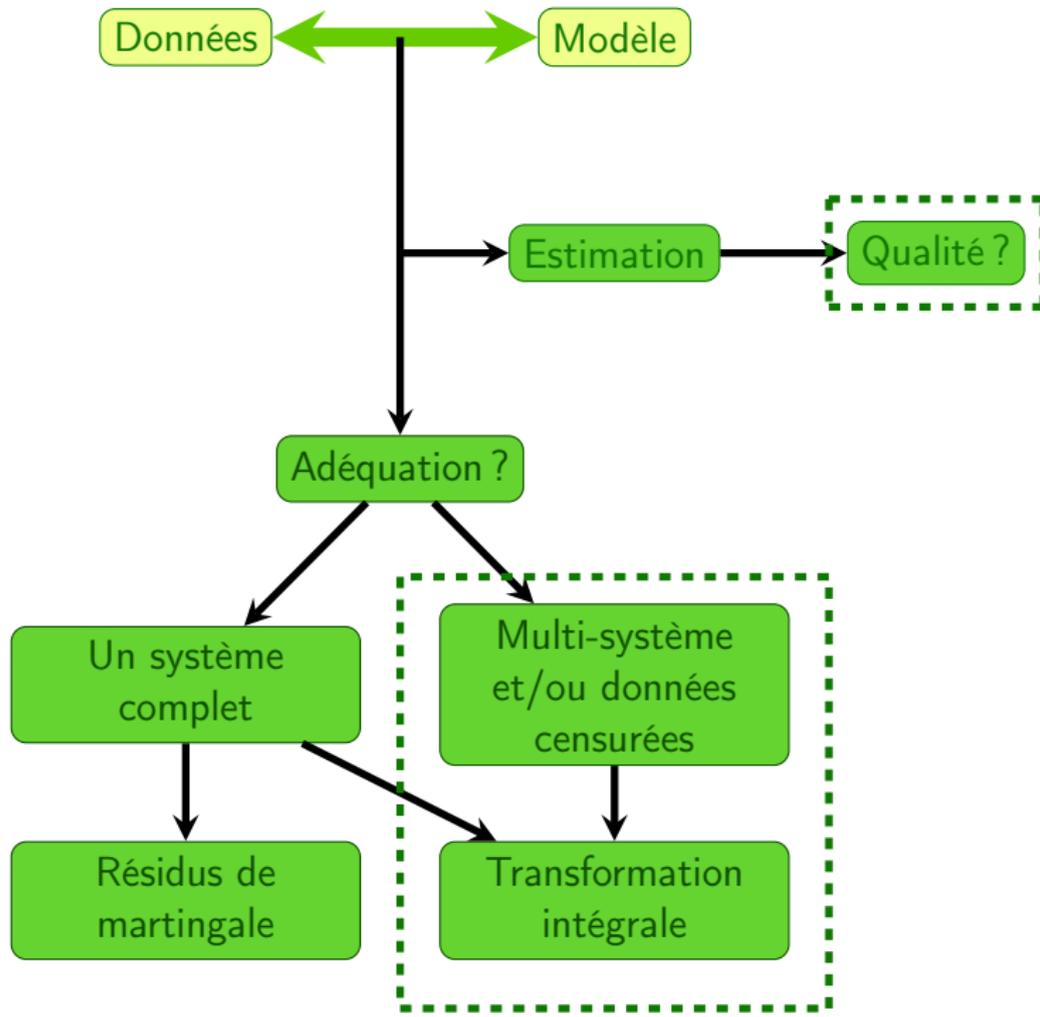
Problématique

Qualité d'estimation

Tests d'adéquation

Conclusion

Bibliographie et bonus



Maintenance imparfaite et modèles d'âge virtuel : tests d'adéquation

Introduction à la maintenance imparfaite

Modèles d'âge virtuel

Problématique

Qualité d'estimation

Tests d'adéquation

Conclusion

Bibliographie et bonus

Estimation des paramètres $\theta = (\alpha, \beta, \rho)$ par maximum de vraisemblance

```
mle1 <- mle.vam(Time&Type~(ARAIInf(0.5)|Weibull(1.5,2.5)),  
  AMC_Amb)  
coef(mle1)
```

```
> coef(mle1)  
[1] 2.120558e-09 3.582878e+00 2.457934e-01
```

Qualité d'estimation :

Qualité de cette estimation ? Étude par simulation :

- je simule $L = 5000$ jeux de données suivant un modèle,
- j'estime les paramètres du modèle en fonction des données simulées,
- j'obtiens 5 000 estimations des paramètres,
- je calcule moyenne, écart-type, erreur quadratique moyenne.

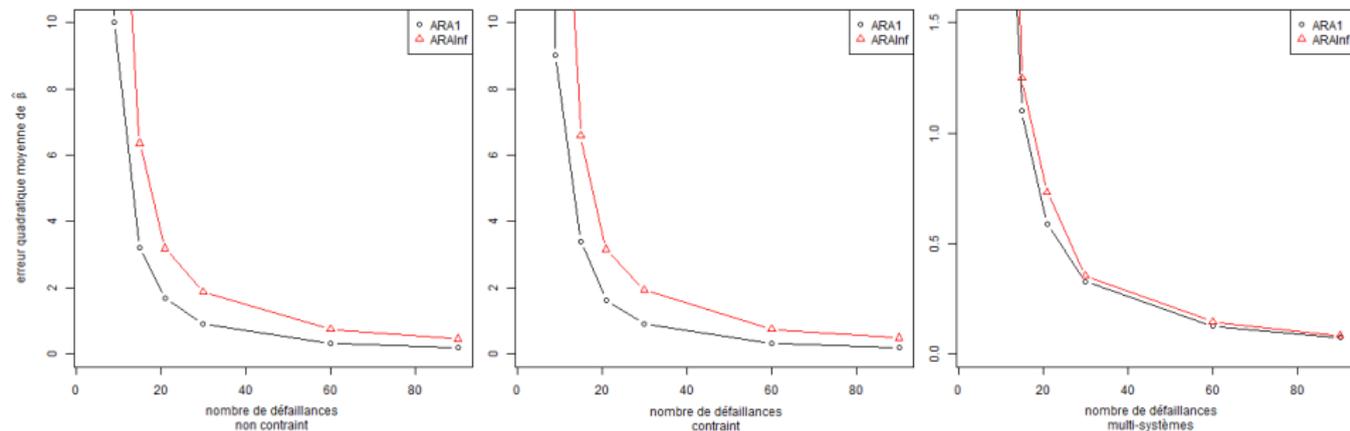
Estimation sur un seul système, puis multi-systèmes ; ajout de contraintes ($\beta \leq 1, 0 \leq \rho \leq 1$)

β surestimé, α légèrement surestimé, ρ correctement estimé pour ARA_{∞} ,
estimation de ρ parfois incohérente pour ARA_1 de 9 à 30 défaillances

Estimation contrainte : idem pour α et β ; $\hat{\rho}$ redevient "cohérent".

Estimation multi-systèmes : α et β mieux estimés, $\hat{\rho}$ excellent. [3 défaillances,
1,3,5,7,10,20,30 systèmes]

Figure – Erreur quadratique moyenne de $\hat{\beta}$ vs. nombre de données



Résidus de martingale :

$\{N_t\}_{t \geq 0}$: processus de comptage [données]

$\{\Lambda_t(\theta)\}_{t \geq 0}$: intensité cumulée [modèle]

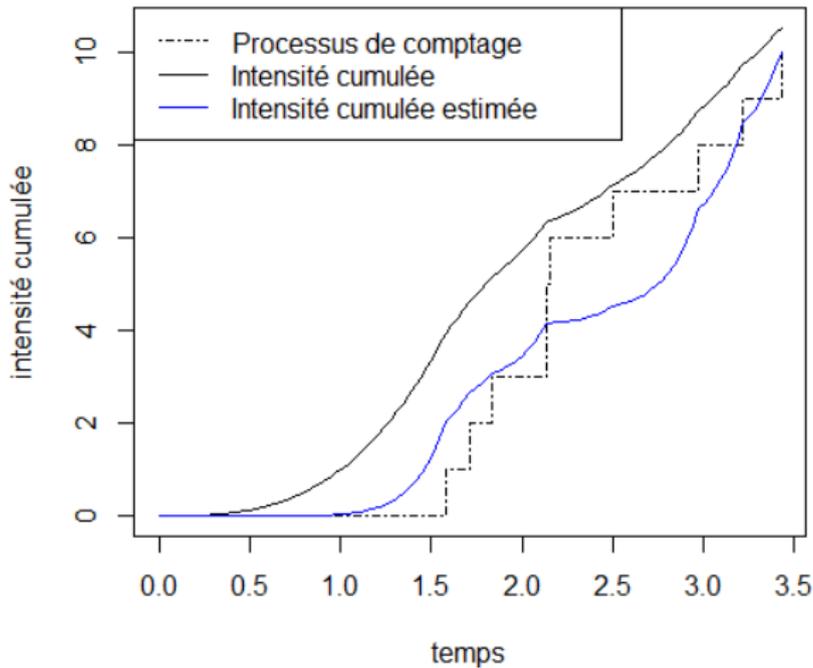
$\{\Lambda_t(\hat{\theta})\}_{t \geq 0}$: intensité cumulée avec les paramètres estimés

$M_t = N_t - \Lambda_t(\theta)$: martingale centrée

Exemple de statistique : Kolmogorov-Smirnov

$$\begin{aligned}KS_m(\hat{\theta}) &= \sup_{t \in [0, T_n]} |N_t - \Lambda_t(\hat{\theta})| \\ &= \max \left(\max_{i=1, \dots, n} (i - 1 - \Lambda_{T_{i-1}}(\hat{\theta})) ; \right. \\ &\quad \left. \max_{i=1, \dots, n} (\Lambda_{T_i}(\hat{\theta}) - i + 1) \right)\end{aligned}$$

Autres : Cramér von Mises, Anderson-Darling



```

sim1 <- sim.vam(Time&Type~(ARAIInf(0.2)|Weibull(1,3)))
dt1 <- simulate(sim1,stop.policy = 10)
mle1<-mle.vam(Time&Type~(ARAIInf(0.5)|Weibull(1.5,2.5)),dt1)
coef(mle1)
plot(sim1,'I',xlab="temps",ylab="intensité cumulée")
plot(mle1,'I-cm',col="blue",add=TRUE)

```

Maintenance
imparfaite et
modèles d'âge
virtuel : tests
d'adéquation

Introduction à la
maintenance
imparfaite

Modèles d'âge
virtuel

Problématique

Qualité
d'estimation

Tests
d'adéquation

Résidus de
martingale

Transformation
intégrale

Procédure de test

Censure par le
temps

Principe

Fonction de
répartition

Données
multi-systèmes

Conclusion

Bibliographie et
bonus

Transformation intégrale :

Sous H_0 , $\Lambda_{T_i}(\theta) - \Lambda_{T_{i-1}}(\theta) \sim \mathcal{E}(1)$ iid, $i = 1, \dots, n$
 $\Rightarrow U_i := 1 - \exp(-\Lambda_{T_i}(\theta) + \Lambda_{T_{i-1}}(\theta)) \sim \mathcal{U}[0, 1]$ iid,
 $i = 1, \dots, n$

Exemple de statistique : Kolmogorov-Smirnov

$$\begin{aligned}KS_u(\hat{\theta}) &= \sqrt{n} \sup_{0 \leq x \leq 1} |F_{n,S}(x) - x| \\ &= \sqrt{n} \max \left(\max_{i=1, \dots, n} \left(\frac{i}{n} - U_{(i)}(\hat{\theta}) \right) ; \right. \\ &\quad \left. \max_{i=1, \dots, n} \left(U_{(i)}(\hat{\theta}) - \frac{i-1}{n} \right) \right)\end{aligned}$$

Autres : Cramér von Mises, Anderson-Darling

Procédure de test :

- 1 Calculer l'estimateur $\hat{\theta}$ de θ suivant le modèle testé ;

Maintenance
imparfaite et
modèles d'âge
virtuel : tests
d'adéquation

Introduction à la
maintenance
imparfaite

Modèles d'âge
virtuel

Problématique

Qualité
d'estimation

**Tests
d'adéquation**

Résidus de
martingale

Transformation
intégrale

Procédure de test

Censure par le
temps

Principe

Fonction de
répartition

Données
multi-systèmes

Conclusion

Bibliographie et
bonus

Procédure de test :

- 1 Calculer l'estimateur $\hat{\theta}$ de θ suivant le modèle testé ;
- 2 Calculer la statistique $Z(\hat{\theta})$ sur le jeu de données T_1, \dots, T_n ;

Maintenance
imparfaite et
modèles d'âge
virtuel : tests
d'adéquation

Introduction à la
maintenance
imparfaite

Modèles d'âge
virtuel

Problématique

Qualité
d'estimation

Tests
d'adéquation

Résidus de
martingale

Transformation
intégrale

Procédure de test

Censure par le
temps

Principe

Fonction de
répartition

Données
multi-systèmes

Conclusion

Bibliographie et
bonus

Procédure de test :

- 1 Calculer l'estimateur $\hat{\theta}$ de θ suivant le modèle testé ;
- 2 Calculer la statistique $Z(\hat{\theta})$ sur le jeu de données T_1, \dots, T_n ;
- 3 Pour $i = 1$ jusqu'à L ,

Maintenance
imparfaite et
modèles d'âge
virtuel : tests
d'adéquation

Introduction à la
maintenance
imparfaite

Modèles d'âge
virtuel

Problématique

Qualité
d'estimation

Tests
d'adéquation

Résidus de
martingale

Transformation
intégrale

Procédure de test

Censure par le
temps

Principe

Fonction de
répartition

Données
multi-systèmes

Conclusion

Bibliographie et
bonus

Procédure de test :

- 1 Calculer l'estimateur $\hat{\theta}$ de θ suivant le modèle testé;
- 2 Calculer la statistique $Z(\hat{\theta})$ sur le jeu de données T_1, \dots, T_n ;
- 3 Pour $i = 1$ jusqu'à L ,
 - 1 Simuler un jeu de données $T_{1,i}^*, \dots, T_{n,i}^*$ d'après le modèle testé, avec pour paramètre $\hat{\theta}$;

Procédure de test :

- 1 Calculer l'estimateur $\hat{\theta}$ de θ suivant le modèle testé ;
- 2 Calculer la statistique $Z(\hat{\theta})$ sur le jeu de données T_1, \dots, T_n ;
- 3 Pour $i = 1$ jusqu'à L ,
 - 1 Simuler un jeu de données $T_{1,i}^*, \dots, T_{n,i}^*$ d'après le modèle testé, avec pour paramètre $\hat{\theta}$;
 - 2 Calculer l'estimateur $\hat{\theta}_i^*$ de $\hat{\theta}$ à partir des données $T_{1,i}^*, \dots, T_{n,i}^*$ suivant le modèle testé ;

Procédure de test :

- 1 Calculer l'estimateur $\hat{\theta}$ de θ suivant le modèle testé ;
- 2 Calculer la statistique $Z(\hat{\theta})$ sur le jeu de données T_1, \dots, T_n ;
- 3 Pour $i = 1$ jusqu'à L ,
 - 1 Simuler un jeu de données $T_{1,i}^*, \dots, T_{n,i}^*$ d'après le modèle testé, avec pour paramètre $\hat{\theta}$;
 - 2 Calculer l'estimateur $\hat{\theta}_i^*$ de $\hat{\theta}$ à partir des données $T_{1,i}^*, \dots, T_{n,i}^*$ suivant le modèle testé ;
 - 3 Calculer la statistique $Z_i^* = Z_i^*(\hat{\theta}_i^*)$ à partir des $T_{1,i}^*, \dots, T_{n,i}^*$ et de $\hat{\theta}_i^*$.

Procédure de test :

- 1 Calculer l'estimateur $\hat{\theta}$ de θ suivant le modèle testé ;
- 2 Calculer la statistique $Z(\hat{\theta})$ sur le jeu de données T_1, \dots, T_n ;
- 3 Pour $i = 1$ jusqu'à L ,
 - 1 Simuler un jeu de données $T_{1,i}^*, \dots, T_{n,i}^*$ d'après le modèle testé, avec pour paramètre $\hat{\theta}$;
 - 2 Calculer l'estimateur $\hat{\theta}_i^*$ de $\hat{\theta}$ à partir des données $T_{1,i}^*, \dots, T_{n,i}^*$ suivant le modèle testé ;
 - 3 Calculer la statistique $Z_i^* = Z_i^*(\hat{\theta}_i^*)$ à partir des $T_{1,i}^*, \dots, T_{n,i}^*$ et de $\hat{\theta}_i^*$.
- 4 Calculer la p-valeur comme étant la probabilité empirique que Z^* soit plus grand que $Z(\hat{\theta})$.

Procédure de test :

- 1 Calculer l'estimateur $\hat{\theta}$ de θ suivant le modèle testé ;
- 2 Calculer la statistique $Z(\hat{\theta})$ sur le jeu de données T_1, \dots, T_n ;
- 3 Pour $i = 1$ jusqu'à L ,
 - 1 Simuler un jeu de données $T_{1,i}^*, \dots, T_{n,i}^*$ d'après le modèle testé, avec pour paramètre $\hat{\theta}$;
 - 2 Calculer l'estimateur $\hat{\theta}_i^*$ de $\hat{\theta}$ à partir des données $T_{1,i}^*, \dots, T_{n,i}^*$ suivant le modèle testé ;
 - 3 Calculer la statistique $Z_i^* = Z_i^*(\hat{\theta}_i^*)$ à partir des $T_{1,i}^*, \dots, T_{n,i}^*$ et de $\hat{\theta}_i^*$.
- 4 Calculer la p-valeur comme étant la probabilité empirique que Z^* soit plus grand que $Z(\hat{\theta})$.
- 5 Rejeter l'hypothèse nulle au risque α si la p-valeur est inférieure à α .

Censure :

Type I

Expérience menée jusqu'à un temps fixé

Type II

Expérience menée jusqu'à avoir un nombre fixé d'observations

Maintenance imparfaite et modèles d'âge virtuel : tests d'adéquation

Introduction à la maintenance imparfaite

Modèles d'âge virtuel

Problématique

Qualité d'estimation

Tests d'adéquation

Résidus de martingale

Transformation intégrale

Procédure de test

Censure par le temps

Principe

Fonction de répartition

Données multi-systèmes

Conclusion

Bibliographie et bonus

Censure :

Type I

Expérience menée jusqu'à un temps fixé

Type II

Expérience menée jusqu'à avoir un nombre fixé d'observations

Censure aléatoire : T_i non connue, on sait que $T_i > C_i$ où C_i v.a. indépendante.

Type I : $C_1 = \dots = C_n = c$ p.s.

Type II : $C_1 = \dots = C_n = +\infty$ p.s.

Maintenance préventive peut être vue comme censure aléatoire.

Si $T_i > C_i$, T_i remplacée par C_i . Paires (T_i^c, δ_i) :

$$T_i^c = \min(T_i, C_i), \quad \delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } T_i^c = T_i \text{ (observée)} \\ 0 & \text{si } T_i^c = C_i \text{ (censure)} \end{cases}$$

pour $1 \leq i \leq n$, $U_i^c := 1 - \exp(-\Lambda_{T_i^c}(\theta) + \Lambda_{T_{i-1}^c}(\theta))$

Estimateur de Kaplan-Meier de la fonction de répartition de données censurées :

$$F_n^c(x) = \begin{cases} 0 & x < U_{(1)}^c \\ 1 - \prod_{i:U_i^c \leq x} \left(\frac{n - R_i}{n - R_i + 1} \right)^{\delta_i} & U_{(1)}^c \leq x < U_{(n)}^c \\ 1 & x \geq U_{(n)}^c \end{cases}$$

où R_i : rang de U_i dans l'échantillon ordonné

Observation de plusieurs systèmes identiques et indépendants

Tests issus de la transformation intégrale

Calcul de puissances : 5 systèmes ayant subi chacun 6
défaillances

Modèle testé	ARA ₁			ARA _∞			QR		
	<i>KS</i>	<i>CvM</i>	<i>AD</i>	<i>KS</i>	<i>CvM</i>	<i>AD</i>	<i>KS</i>	<i>CvM</i>	<i>AD</i>
ARA ₁	0.05	0.04	0.04	0.04	0.04	0.03	0.09	0.09	0.11
ARA _∞	0.05	0.05	0.04	0.06	0.05	0.05	0.08	0.09	0.11
QR	0.06	0.06	0.06	0.06	0.07	0.07	0.05	0.06	0.05

Diagonale = niveau de significativité empirique \implies OKAutres = puissances \implies mauvais...

Conclusion et ouverture

Puissances faibles : changer procédure de test ? nouvelles statistiques ? lois des statistiques sous H_0 ?

Intégrer maintenance préventive

Sujet de thèse : intégrer de l'hétérogénéité dans les modèles de maintenance imparfaite, à l'aide notamment de covariables (ex. : état de dégradation du système, effet des conditions environnementales). Modélisation, inférence, prise de décision.

Introduction à la
maintenance
imparfaite

Modèles d'âge
virtuel

Problématique

Qualité
d'estimation

Tests
d'adéquation

Conclusion

Bibliographie et
bonus

Bibliographie I

- [1] C. W. Ahn, K. C. Chae et G. M. Clark :
Estimating parameters of the power law process with two measures of failure time.
Journal of Quality Technology, 30(2):127–132, 1998.
- [2] Maria Luíza Guerra de Toledo, Marta A. Freitas, Enrico A. Colosimo et Gustavo L. Gilardoni :
Optimal periodic maintenance policy under imperfect repair : a case study on the engines of off-road vehicles.
IIE Transactions, 48(8):747–758, 2016.
- [3] Laurent Doyen et Olivier Gaudoin :
Classes of imperfect repair models based on reduction of failure intensity or virtual age.
Reliability Engineering and System Safety, 84:45–56, 2004.

Maintenance
imparfaite et
modèles d'âge
virtuel : tests
d'adéquation

Introduction à la
maintenance
imparfaite

Modèles d'âge
virtuel

Problématique

Qualité
d'estimation

Tests
d'adéquation

Conclusion

Bibliographie et
bonus

Bibliographie II

- [4] Laurent Doyen et Rémy Drouilhet :
A generic framework for generalized virtual age models.
Article non paru.
- [5] Cécile Chauvel, Jean-Yves Dauxois, Laurent Doyen et Olivier Gaudoin :
Parametric Bootstrap Goodness-of-Fit Tests for Imperfect Maintenance Models.
IEEE Transactions on Reliability, 65(3):1343–1359, sep 2016.
- [6] Ralph B. D'Agostino et Michael A. Stephens :
Goodness-of-Fit Techniques, volume 68 de *Statistics : textbooks and monographs*.
CRC Press, 1986.

Maintenance
imparfaite et
modèles d'âge
virtuel : tests
d'adéquation

Introduction à la
maintenance
imparfaite

Modèles d'âge
virtuel

Problématique

Qualité
d'estimation

Tests
d'adéquation

Conclusion

Bibliographie et
bonus

Bibliographie III

- [7] James A. Koziol :
Goodness-of-Fit Tests for Randomly Censored Data.
Biometrika, 67(3):693–696, dec 1980.
- [8] James A. Koziol et Sylvan B. Green :
A Cramer-von Mises Statistic for Randomly Censored
Data.
Biometrika, 63(3):465–474, dec 1976.

Maintenance
imparfaite et
modèles d'âge
virtuel : tests
d'adéquation

Introduction à la
maintenance
imparfaite

Modèles d'âge
virtuel

Problématique

Qualité
d'estimation

Tests
d'adéquation

Conclusion

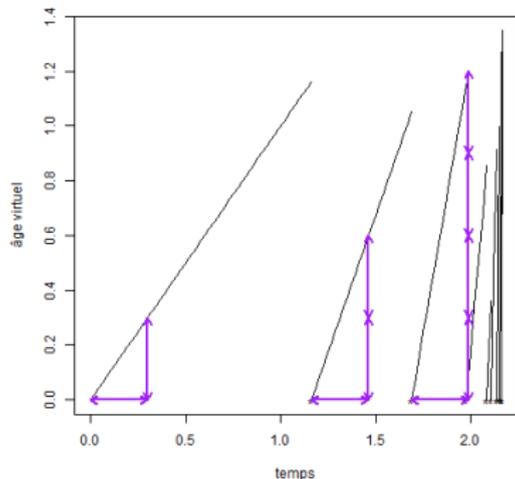
Bibliographie et
bonus

Définition (QR)

$$\varepsilon_i(t) = \frac{t - T_i}{a^i}$$

$$\lambda_t = \frac{1}{a^{N_{t^-}}} \lambda \left(\frac{t - T_{N_{t^-}}}{a^{N_{t^-}}} \right)$$

```
mod4 <- sim.vam(~(QR(2)|Weibull(1,3)))  
dt4 <- simulate(mod4)  
plot(mod4,'v',xlab="temps",ylab="âge virtuel")
```



Maintenance imparfaite et modèles d'âge virtuel : tests d'adéquation

Introduction à la maintenance imparfaite

Modèles d'âge virtuel

Problématique

Qualité d'estimation

Tests d'adéquation

Conclusion

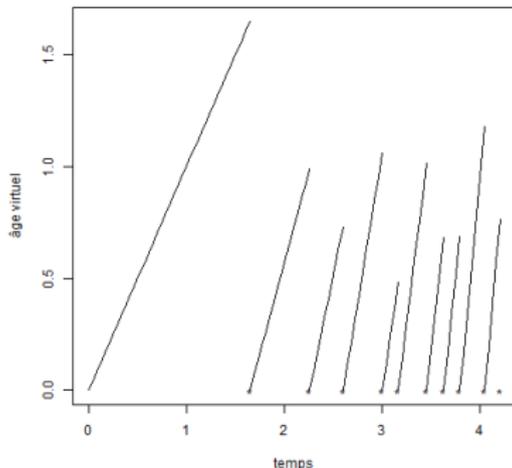
Bibliographie et bonus

Définition (GQR)

$$\varepsilon_i(t) = \frac{t - T_i}{a^{b_i}}$$

$$\lambda_t = \frac{1}{a^{b_{N_{t^-}}}} \lambda \left(\frac{t - T_{N_{t^-}}}{a^{b_{N_{t^-}}}} \right)$$

```
mod5 <- sim.vam(~(GQR(2|log)|Weibull(1,3)))  
dt5 <- simulate(mod5)  
plot(mod5,'v',xlab="temps",ylab="âge virtuel")
```



Maintenance
imparfaite et
modèles d'âge
virtuel : tests
d'adéquation

Introduction à la
maintenance
imparfaite

Modèles d'âge
virtuel

Problématique

Qualité
d'estimation

Tests
d'adéquation

Conclusion

Bibliographie et
bonus