

# Algorithmes de convolution-redistanciation pour le couplage fluide-structure en coordonnées eulériennes

Arnaud Sengers

Collaboration : Emmanuel Maitre, Mourad Ismail et Thibaut Métivet  
Laboratoire Jean Kuntzmann et Laboratoire Interdisciplinaire de Physique,  
Université Grenoble Alpes



## Cadre :

Étudier le comportement d'une membrane élastique inextensible immergée dans un fluide. Application : globules rouges dans le plasma.

Nous allons utiliser une méthode levelset pour représenter l'interface, c'est-à-dire qu'elle est représentée par la ligne de niveau 0 d'une fonction auxiliaire  $\phi$ .

- L'intérieur du globule rouge est déterminé par l'ensemble  $\{\phi < 0\}$ .
- Le volume du globule rouge et l'aire de la membrane sont fixes.
- La forme du globule minimise l'énergie de courbure moyenne.



Figure: Formulation levelset du problème.

## Étapes de la présentation :

- Présentation des méthodes de diffusion introduites par Merriman, Bence, Osher [1994].
- Approximation du flot de Willmore par une méthode de diffusion.
- Étape de correction pour récupérer les contraintes de volume et d'aire.

Nous considérons le modèle levelset introduit par Cottet-Maitre :

$$\begin{cases} \rho(\partial_t u + u \cdot \nabla u) + \nabla p - \mu \Delta u = F_\varepsilon(\phi) + F_c(\phi) \\ \nabla \cdot u = 0 \\ \partial_t \phi + u \cdot \nabla \phi = 0 \end{cases}$$

- $F_c(\phi)$  est la force de courbure dérivant  $\frac{1}{2} \int_{\{\phi=0\}} H^2 d\sigma$ , où  $H$  désigne la courbure moyenne.
- $F_\varepsilon(\phi)$  est une force élastique de pénalisation qui contraint la conservation d'aire.
- La conservation de volume est assurée par la contrainte de divergence nulle.

## Problématique

Quel couplage choisir ?

- Couplage implicite : trop coûteux algorithmiquement.
- Couplage explicite : le pas de temps doit être choisi très petit pour que le schéma soit stable.
- Couplage semi-implicite (basé sur une prédiction de la position de la levelset à l'instant  $n + 1$  à l'aide d'une équation de la chaleur) : amélioration du pas de temps au prix d'une équation de la chaleur.

On introduit une prédiction  $\tilde{\phi}^{n+1}$  de la position de l'interface pour avoir une expression plus précise des forces dans l'équation fluide :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{\phi}^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} - \frac{1}{\rho} \left[ E'(|\nabla \phi^n|) \frac{1}{\varepsilon} \zeta \left( \frac{\phi^n}{\varepsilon} \right) \right] \Delta \tilde{\phi}^{n+1} = -u^n \cdot \nabla \phi^n \\ \rho \left( \frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} + u^n \cdot \nabla u^n \right) + \nabla p^{n+1} - \mu \Delta u^{n+1} = F_\varepsilon(\tilde{\phi}^{n+1}) + F_c(\tilde{\phi}^{n+1}) \\ \operatorname{div}(u^{n+1}) = 0 \\ \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + u^{n+1} \cdot \nabla \phi^{n+1} = 0 \end{array} \right.$$

### Proposition

Le schéma semi-implicite est inconditionnellement stable.

### Application

On peut prendre un plus grand pas de temps lors des simulations que pour le schéma explicite au prix d'une équation de la chaleur.

## Introduction :

On diffuse  $\chi$  pendant un certain pas de temps  $\delta t$  avec pour condition initiale  $\chi^0$  :

$$\partial_t \chi - \Delta \chi = 0$$

En coordonnées cylindriques, par axisymétrie, on obtient :

$$\partial_t \chi + \frac{1}{r} \partial_r \chi - \partial_{rr} \chi = 0$$

Cela correspond à un transport à la vitesse  $\frac{1}{r}$ .  
Au point P, la vitesse normale est donc de  $\frac{1}{R} = H$ . On a donc un moyen simple d'obtenir un déplacement faisant intervenir des quantités géométriques à l'aide uniquement d'équation de la chaleur.

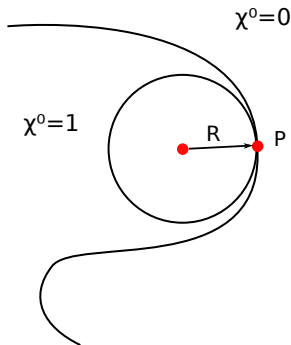


Figure: Configuration dans un voisinage du point P.

Algorithme : Mouvement par courbure moyenne.

On alterne les deux étapes suivantes :

- 1) Diffusion :  $G_{\delta t} * \chi^n = 0$ , où  $G_{\delta t}$  désigne le noyau de la chaleur.
- 2) Seuillage :  $\chi^{n+1} = \mathbf{1}_{\{G_{\delta t} * \chi^n \geq \frac{1}{2}\}}$ .

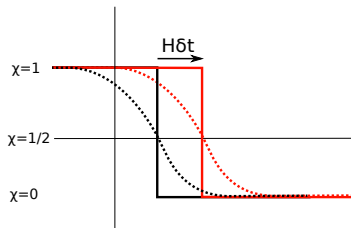


Figure: Profil d'une étape de l'algorithme de Diffusion-Seuillage.

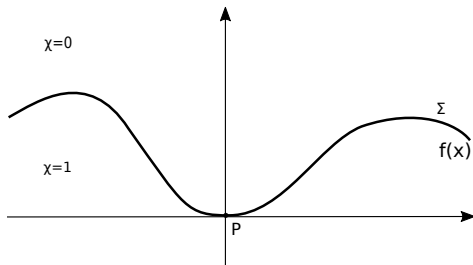
## Obejctif :

Simuler le déplacement d'un globule rouge vers une position d'équilibre sans présence de fluide. Il faut obtenir une vitesse normale selon le flot de Willmore :

$$2D : v = \Delta_{\Gamma} H + \frac{H^3}{2} \quad 3D : v = \Delta_{\Gamma} H + 2H(H^2 - K), \quad K \text{ courbure de Gauss}$$

Localement, l'interface est le graphe d'une fonction  $f$ . Pour  $P$  sur l'interface :

- Par translation, on place  $P$  à l'origine.
- Par rotation, on oriente la normale sortante selon l'axe des ordonnées.
- Le déplacement normal est l'ordonnée à laquelle l'interface coupe l'axe des ordonnées.



On peut alors obtenir le développement suivant :

$$G_{\delta t} * \mathbf{1}_{\{y < f(x)\}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} y \delta t^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} H \delta t^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} W \delta t^{\frac{3}{2}} + \mathcal{O}(\delta t^{\frac{5}{2}})$$

Si l'on seuille à  $1/2$ , l'interface aura pour ordonnée :

$$y = Ht + \frac{1}{2} Wt^2 + \mathcal{O}(t^3)$$

On peut obtenir un déplacement par flot de Willmore avec deux convolutions prises aux temps  $\frac{\sqrt{2\delta t}}{\theta}$  et  $\theta\sqrt{2\delta t}$  :

$$(2\delta t)^{\frac{1}{4}} \left( \sqrt{\theta} G_{\frac{\sqrt{2\delta t}}{\theta}} - G_{\theta\sqrt{2\delta t}} \right) * 1^n = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{\theta} - \theta \right) (y - \delta t W) + \mathcal{O}(\delta t^{\frac{3}{2}})$$

## Problématiques :

- Le choix du  $\theta$  dans le noyau de la chaleur est délicat. Un trop grand  $\theta$  conduit à des effets non locaux. Un petit  $\theta$  correspond à des petits pas de temps.
- Nécessité de raffiner le maillage au voisinage de l'interface pour une bonne résolution et que l'interface ne reste pas "coincée".
- Que se passe-t-il si on prend une fonction distance signée plutôt qu'une fonction indicatrice ?

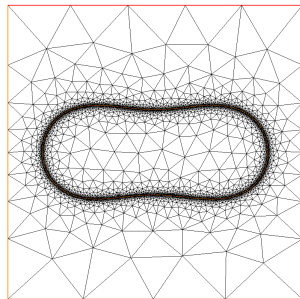


Figure: Simulation sous FreeFem++



## Proposition : Développement de la fonction distance

Au voisinage de l'interface, on obtient le développement local de la fonction distance diffusée par l'équation de la chaleur pendant un temps  $\delta t$  :

$$\text{Cas 2D : } G_{\delta t} * d^n = d^n + H\delta t + \frac{1}{2} [\Delta_{\Sigma} H + H^3] \delta t^2 + \mathcal{O}(\delta t^3)$$

$$\text{Cas 3D : } G_{\delta t} * d^n = d^n + 2H\delta t + [\Delta_{\Sigma} H + 4H(H^2 - K)] \delta t^2 + \mathcal{O}(\delta t^3).$$

## Remarque :

- Contrairement au cas de la fonction indicatrice, on n'obtient pas immédiatement le terme de Willmore au 2ème ordre.
- Il est nécessaire d'ajouter un terme correctif pour obtenir le bon déplacement.
- Cette extension a déjà été présentée par Esodoglu, Ruuth, Tsai [2009] dans le cas de la dimension 2 en utilisant une méthode similaire à celle du cas de la fonction indicatrice.
- Nous présentons ici une méthode plus intrinsèque qui simplifie les calculs et facilement généralisable aux dimensions supérieures.

On part du développement de Taylor de  $\phi$  solution de l'équation de la chaleur avec pour condition initiale  $\phi(0) = d^n$  :

$$\begin{aligned}\phi(\delta t, x) &= \phi(0) + \delta t \partial_t \phi(0) + \frac{\delta t^2}{2} \partial_{tt} \phi(0) + \mathcal{O}(\delta t^3) \\ &= d^n(x) + \delta t \Delta d^n(x) + \frac{\delta t^2}{2} \Delta^2 d^n(x) + \mathcal{O}(\delta t^3)\end{aligned}$$

On rappelle que :  $\Delta d = 2H$ . Il reste à exprimer  $\Delta^2 d$  géométriquement. D'après Delfour et Zolesio, on peut exprimer l'opérateur de Laplace-Beltrami ainsi :

$$\Delta_{\Sigma}(\Delta d) = \Delta (\Delta d(x - d(x) \nabla d(x)))|_{\Sigma}$$

Le terme de droite s'exprime :

$$\begin{aligned}\Delta (\Delta d(x - d \nabla d)) &= (\mathbb{I} - \nabla d \otimes \nabla d - d \nabla^2 d)^2 : \nabla^2(\Delta d)(x - d \nabla d) \\ &\quad + \operatorname{div} (\mathbb{I} - \nabla d \otimes \nabla d - d \nabla^2 d) \cdot \nabla \Delta (x - d \nabla d)\end{aligned}$$

En évaluant à l'interface  $d = 0$  :

$$\begin{aligned}\forall x \in \Sigma, 2\Delta_{\Sigma} H(x) &= \Delta^2 d(x) - \nabla d \otimes \nabla d : \nabla^2(\Delta d) + \Delta d \nabla d \cdot \nabla \Delta d \\ &= \Delta^2 d - 2\partial_{nn} H(x) + 4H(x) \partial_n H(x)\end{aligned}$$

On peut exprimer la dérivée normale de  $H$  par ( $h_1, h_2$  sont les courbures principales) :

$$\begin{aligned} 2\partial_n H &= \nabla d \cdot \nabla \Delta d = \nabla d \cdot \operatorname{div}(\nabla^2 d) = \operatorname{div}(\nabla d \cdot \nabla^2 d) - \nabla^2 d : \nabla^2 d \\ &= -(h_1^2 + h_2^2) = -(h_1 + h_2)^2 + 2h_1 h_2 = -(4H^2 - 2K). \end{aligned}$$

La dérivée seconde normale de  $H$  vaut alors :

$$\partial_{nn} H = 4H(2H^2 - K) + \partial_n K.$$

On utilise que :

$$\begin{cases} \partial_n \nabla^2 d = \nabla d \cdot \nabla(\nabla^2 d) = \nabla(\nabla^2 d \nabla d) - \nabla^2 d \times \nabla^2 d = -\nabla^2 d \times \nabla^2 d \\ \partial_n(\nabla d \otimes \nabla d) = 0, \end{cases}$$

pour obtenir la dérivée normale de  $K = \det(\nabla^2 d + \nabla d \otimes \nabla d)$  :

$$\begin{aligned} \partial_n K &= \operatorname{Tr}(\operatorname{cof}^T(\nabla^2 d + \nabla d \otimes \nabla d) \partial_n(\nabla^2 d + \nabla d \otimes \nabla d)) \\ &= -\operatorname{Tr}((\operatorname{cof}^T(\nabla^2 d + \nabla d \otimes \nabla d)(\nabla^2 d + \nabla d \otimes \nabla d)) \nabla^2 d) \\ &= -\operatorname{Tr}(\det(\nabla^2 d + \nabla d \otimes \nabla d) \nabla^2 d) = -K \operatorname{Tr}(\nabla^2 d) = -2KH. \end{aligned}$$

En regroupant tous les termes obtenus, on obtient le résultat :

$$\Delta^2 d = 2 \left[ \Delta_\Sigma H + 4H(H^2 - K) \right].$$

## Algorithme : Flot de Willmore par convolution-redistanciation 2D.

On alterne les deux étapes suivantes :

- 1) Diffusion : Former les convolutions  $G_{\sqrt{\delta t}} * d^n$  et  $G_{2\sqrt{\delta t}} * d^n$ .
- 2) Former :  $A = 2G_{\sqrt{\delta t}} * d^n - G_{2\sqrt{\delta t}} * d^n$  et  $B = (G_{\sqrt{\delta t}} * d^n - d^n)^3$ .
- 3) Redistanciation :  $d^{n+1} = \text{redist} \left( A + \frac{B}{2} \right)$ .

## Algorithme : Flot de Willmore par convolution-redistanciation 3D.

On alterne les deux étapes suivantes :

- 1) Diffusion : Former les convolutions  $G_{\sqrt{\delta t}} * d^n$  et  $G_{2\sqrt{\delta t}} * d^n$ .
- 2) Former  $A = 2G_{\sqrt{\delta t}} * d^n - G_{2\sqrt{\delta t}} * d^n$  et  $B = G_{\sqrt{\delta t}} * \left( \frac{(d^n)^2}{2} \right) - \frac{(d^n)^2}{2} - \sqrt{\delta t}$ .
- 3) Redistanciation :  $d^{n+1} = \text{redist} (A + B)$ .

B représente la correction car le terme d'ordre 2 de l'expansion n'est pas exactement le terme de Willmore. Plusieurs corrections ont été essayées pour le cas 3D.

## Contraintes de volume et d'aires :

Les algorithmes de diffusions ne conservent pas le volume et l'aire. On corrige en déplaçant légèrement l'interface pour retrouver les contraintes. On cherche  $\lambda, \mu$  tels que  $\{\phi = \lambda H + \mu\}$  satisfasse les contraintes.

Lagrangien du flot de Willmore avec conservation de volume et d'aire contrainte par multiplicateurs de Lagrange :

$$\text{Lag}(\phi, \lambda, \mu) = \frac{1}{2} \int_{\{\phi=0\}} H^2 d\sigma + \lambda \left( \int_{\{\phi=0\}} d\sigma - L_0 \right) + \mu \left( \int_{\{\phi<0\}} dx - V_0 \right)$$

Sa première variation vaut, pour toute fonction  $\psi$  régulière :

$$d_\phi \text{Lag}(\phi, \lambda, \mu)(\psi) = \int_{\{\phi=0\}} \left( \Delta_\Gamma H + \frac{H^3}{2} \right) \psi d\sigma + \lambda \int_{\{\phi=0\}} H \psi d\sigma + \mu \int_{\{\phi=0\}} \psi d\sigma$$

Le choix  $\lambda H + \mu$  est naturel car il ressort des premières variations des multiplicateurs du Lagrangien.

## Reformulation du problème :

Posons  $\nu = \mu + \lambda \bar{H}$  avec  $\bar{H} = \frac{1}{L(\phi)} \int_{\{\phi=0\}} H d\sigma$ . On cherche  $\lambda, \nu$  pour que  $\lambda(H - \bar{H}) + \nu$  ait le volume et l'aire requis. Un déplacement de l'interface de  $\lambda(H - \bar{H})$  conserve le volume.

Choix de  $\nu$  :

$$\begin{aligned} V(\phi + \nu) &= \int_{\{\phi + \nu < 0\}} d\sigma \\ &= V(\phi) + dV(\phi)(\nu) + \mathcal{O}(\nu^2) \\ &= V(\phi) + \int_{\{\phi=0\}} \nu d\sigma \\ &= V(\phi) + \nu L(\phi) + \mathcal{O}(\nu^2) \end{aligned}$$

Choix de  $\lambda$  :

$$\begin{aligned} L(\phi + \lambda(H - \bar{H})) &= L(\phi) + dL(\phi)(\lambda(H - \bar{H})) + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ &= L(\phi) + \int_{\{\phi=0\}} \lambda H (H - \bar{H}) d\sigma + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ &= L(\phi) + \lambda \int_{\{\phi=0\}} (H - \bar{H})^2 d\sigma + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned}$$

## Étape de correction :

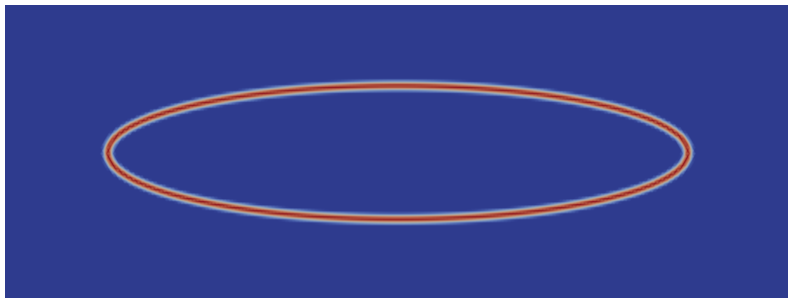
En posant  $\nu = \frac{V_0 - V(\phi)}{L(\phi)}$  et  $\lambda = \frac{L_0 - L(\phi)}{\int_{\{\phi=0\}} (H - \bar{H})^2 d\sigma}$ , on a l'algorithme :

- 1) Correction de volume :  $\{\phi = \nu\}$ .
- 2) Correction d'aire :  $\{\phi = \lambda (H - \bar{H}) + \nu\}$ . Volume conservé.

## Remarque :

On ne fait pas exactement une descente de gradient sous contraintes :

- Étape de diffusion-redistanciation : on descend selon le gradient du flot de Willmore sans respecter les contraintes.
- Étape de rescaling : on recolle aux contraintes a posteriori.



Obtention de la forme d'équilibre du globule rouge. Simulation réalisées sous Feel++

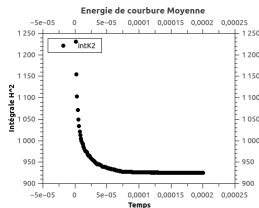
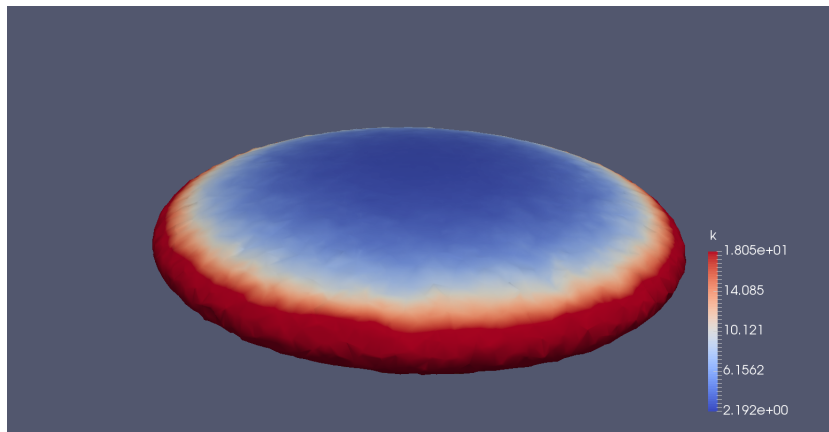


Figure: Évolution l'énergie de courbure moyenne en fonction du temps.





Évolution du globule soumis à la mauvaise vitesse normale, c'est-à-dire pas de correction.

## Conclusion

Nous avons présenté une méthode qui permet de simuler des mouvements géométriques d'ordre 4 uniquement à l'aide d'équations de la chaleur.

## Étude de convergence théorique :

- La convergence théorique des schéma de diffusion-seuillage vers le mouvement par courbure moyenne est bien établie (voir par exemple Luckhaus,Sturzenhecker[1993],Laux,Otto,[2016],Swartz[2018])
- Étudier la convergence des schéma de diffusion-redistanciation.

## Étude numérique :

- Trouver un terme correctif en 3D pour obtenir la bonne vitesse normale.
- Étudier les schéma semi-implicites pour une prédiction faite par convolution-redistanciation-rescaling.

Allez les bleus !